MATEMÁTICA

01. Júnior está lendo um livro com 420 páginas. No primeiro dia, ele leu metade do livro; no segundo dia leu um terço do que restava para ser lido e, no terceiro dia, leu um quinto do que ainda restava. Quantas páginas restam para serem lidas?

A) 108
B) 110
C) 112
D) 114
E) 116

Resposta: C

Justificativa:

No primeiro dia, Júnior leu ½.420 = 210 páginas e restam 210 páginas; no segundo dia, ele leu 1/3.210 = 70 e faltam 140 páginas para serem lidas, e no terceiro dia, ele leu 1/5.140 = 28 páginas e restam 112 páginas para serem lidas.

02. A expressão $\sqrt{2(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{7^2})(1-\frac{1}{11^2})(1-\frac{1}{19^2})}$ é igual a:

A) $(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{19})$

B) $(1-\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{19})$

C) $(1+\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{19})$

D) $(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{19})$

E) $(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{19})$

Resposta: A

Justificativa:

Efetuando as operações indicadas, obtemos:

$$\sqrt{2(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{7^2})(1-\frac{1}{11^2})(1-\frac{1}{19^2})} =$$

$$\sqrt{2.\frac{8}{9}.\frac{48}{49}.\frac{120}{121}.\frac{360}{361}} = \frac{16.120}{7.11.19} = \frac{8.12.20}{7.11.19} = .$$

$$= \frac{8}{7}.\frac{12}{11}.\frac{20}{19} = (1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{19}).$$

03. Uma caixa contém quatro cartões de mesmo formato, sendo três deles com as duas faces coloridas de vermelho e o quarto com uma face colorida de vermelho e a outra de preto. Um destes cartões é escolhido aleatoriamente e colocado sobre uma mesa (suponha iguais as probabilidades de ocorrência de cada um dos cartões). Se a face deste cartão, voltada para cima, tem cor vermelha, qual a probabilidade de a face voltada para baixo ser de cor preta?

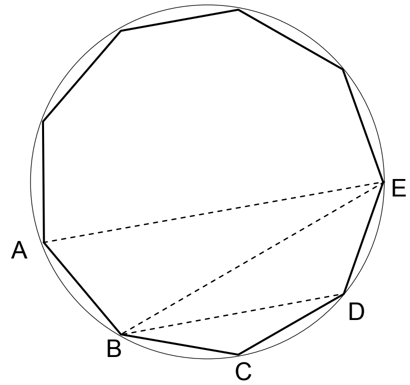
A) 1/2
B) 1/3
C) 1/4
D) 1/5
E) 1/6

Resposta: C

Justificativa:

A face voltada para baixo do cartão sobre a mesa será preta se e somente se o cartão retirado for o que tem uma face vermelha e outra preta. A probabilidade de este ter sido o cartão retirado é de 1/4.

04. Na ilustração a seguir, A, B, C, D e E são vértices consecutivos de um eneágono regular. Assinale a alternativa **incorreta** acerca desta configuração.



A) O ângulo ABC mede 140°.
B) O ângulo AEB mede 30°.
C) As diagonais AE e BD são paralelas.
D) O ângulo AED mede 60°.
E) AE = BD + DE.

Resposta: B

Justificativa:

A) O ângulo ABC é um ângulo interno do eneágono regular e mede (9 - 2).180°/9 = 140° .
B) O ângulo AEB está inscrito na circunferência circunscrita ao eneágono e mede metade de um ângulo central do eneágono, ou seja, (360°/9)/2 = 20°. Deduzimos que a alternativa B é incorreta.
C) O ângulo EBD também está inscrito na circunferência circunscrita ao eneágono e mede 20°. Segue que as diagonais AE e BD são paralelas.
D) No triângulo BDE, o ângulo BDE mede 120° e o ângulo EBD mede 20⁰, logo o ângulo BED mede 40°. Segue que o ângulo AED mede 60°.
E) O trapézio AEDB é isósceles com ângulos agudos medindo 60°. Portanto, AE = BD + 2.DE.cos 60° = BD + DE

05. Vinte e sete cubos de aresta 1 devem ser colados de modo a se obter um cubo de aresta 3. Sempre que dois cubos são colocados face a face, um deles é untado com cola, para mantê-los unidos. Quantas faces devem ser untadas com cola?

A) 50
B) 52
C) 54
D) 56
E) 58

Resposta: C

Justificativa:

Para colarmos 9 cubos de aresta 1, e obtermos um paralelepípedo reto de altura 1 e comprimento e largura 3, precisamos untar 3.2 + 2.3 = 12 faces. Para colarmos três destes paralelepípedos e obtermos o cubo de aresta 3, precisamos untar mais 2.9 = 18 faces. O total de faces a serem untadas é 3.12 + 18 = 54.

06. Usando selos com valores de 5 centavos e de 11 centavos, disponíveis nas quantidades necessárias, qual o maior valor total (correspondente à soma dos valores dos selos utilizados) que **não** se pode obter? (Por exemplo, podemos obter um total de 43 centavos tomando três selos de 11 centavos e dois selos de 5 centavos; entretanto, não é possível obter um total de 23 centavos usando selos de 5 e de 11 centavos. Observação: pode-se utilizar somente selos de 5 centavos ou de 11 centavos.)

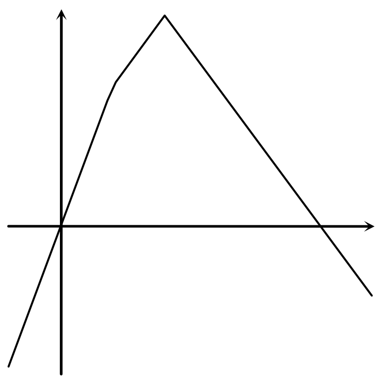
A) 36 centavos
B) 37 centavos
C) 38 centavos
D) 39 centavos
E) 41 centavos

Resposta: D

Justificativa:

Não podemos obter um total de 39 centavos usando selos de 5 centavos e 11 centavos pois nenhum dos valores 39, 39 – 11 = 28, 28 – 11 = 17 e 17 – 11 = 6 é divisível por 5. Além disso, 40 = 8.5, 41 = 11 + 6.5, 42 = 2.11 + 4.5, 43 = 3.11 + 2.5, 44 = 4.11 são 5 valores consecutivos que podem ser obtidos usando selos de 5 e de 11 centavos. Para obter qualquer outro valor maior que 44, basta adicionar a um destes valores (40, 41, 42, 43 ou 44) a quantidade adequada de selos de 5 centavos.

07. Seja f a função com domínio e contradomínio o conjunto dos números reais, que associa a cada real x o menor valor dentre os reais 2x, x + 1 e –x + 5. Qual o valor máximo atingido por f? O gráfico de f , para -1 ≤ x ≤ 6, está esboçado a seguir.



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Resposta: C

Justificativa:

Para x ≤ 1, temos f(x) = 2x (pois 2x ≤ x + 1 ≤ -x +5 se x ≤ 1) e o maior valor assumido por f nesta parte do domínio é 2. Se 1 ≤ x ≤ 2 temos f(x) = x + 1 e o maior valor de f nesta parte do domínio é 3. Se x ≥ 2 temos f(x) = -x + 5 e o maior valor f nesta parte de seu domínio é 3. Portanto, o valor máximo assumido por f é 3, e ocorre para x = 2.

08. Escolhendo, ao acaso, um dos números de cinco dígitos distintos formados com 1, 2, 3, 4 e 5, qual a probabilidade percentual de ele ser múltiplo de quinze?

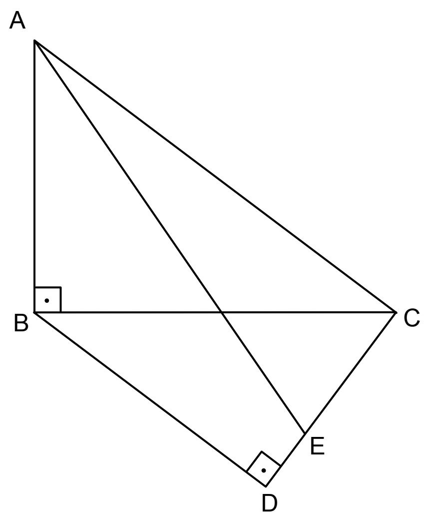
A) 20%
B) 30%
C) 35%
D) 40%
E) 45%

Resposta: A

Justificativa:

Os números formados permutando os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5 são sempre divisíveis por 3, pois 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 é divisível por 3. Para que o número formado seja também divisível por 5, é preciso que o dígito das unidades do número seja 5. Existem 5! possíveis números e o número de múltiplos de 15, dentre estes, é 4!. Logo, a probabilidade percentual procurada é 4!/5!.100 = 20%.

09. Um terreno plano tem formato composto de dois triângulos retângulos, ABC e BDC como ilustrado a seguir. O segmento AE divide ABDC em duas regiões de mesma área. Se AB mede 6km, BC mede 8km, BD mede 6,4km e os ângulos ABC e BDC são retos, quanto mede CE?



A) 3,936km
B) 3,934km
C) 3,932km
D) 3,930km
E) 3,928km

Resposta: A

Justificativa:

Temos AC= $\sqrt{8^2+6^2}$ =10km e DC= $\sqrt{8^2-6{,}4^2}=$ 4,8km. A área de ABC é 6.8/2 = 24km^2 e a de BDC é 6,4.4,8/2 = 15,36km^2 . Segue que a área de AEC mede (24 + 15,36)/2 = 19,68 km^2. O triângulo AEC é retângulo em C, pois os triângulos ABC e BDC são semelhantes. Assim, EC.10/2 = 19,68 e EC = 3,936km.

10. João e Maria, alternadamente, lançam um dado perfeito. Se João é o primeiro a lançar o dado, qual a probabilidade de Maria ser a primeira a obter um 5?

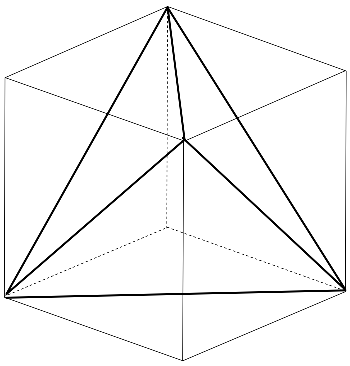
A) 2/11
B) 3/11
C) 4/11
D) 5/11
E) 6/11

Resposta: D

Justificativa:

No lançamento de um dado perfeito, a probabilidade de se obter um 5 é 1/6 e a de não se obter um 5 é 5/6. Maria lança o dado no segundo, quarto, sexto, etc. lançamentos. A probabilidade de o primeiro 5 sair no segundo lançamento é de 5/6.1/6, de sair no quarto lançamento é de $(5/6)^3$.1/6, de sair na sexto lançamento é de $(5/6)^5$.1/6, etc. Estas probabilidades formam uma progressão geométrica com primeiro termo $5/6^2$ e razão $(5/6)^2$. A probabilidade de Maria ser a primeira a obter um 5 é de 5/6.1/6 + $(5/6)^3$.1/6 + $(5/6)^5$.1/6 + ... = $(5/6^2)/(1 - (5/6)^2)$ = 5/11.

11. Os quatro vértices de um tetraedro regular são vértices de um cubo (conforme a ilustração a seguir). Qual fração do volume do cubo é ocupada pelo tetraedro?



A) 1/5
B) 1/4
C) 3/5
D) 1/2
E) 1/3

Resposta: E

Justificativa:

Suponha que a reta do cubo mede a. O cubo fica dividido em um tetraedro regular e quatro tetraedros, que têm bases formadas por triângulos retângulos com catetos medindo a, e altura também medindo a. O volume do tetraedro regular é a^3 – 4.1/3.a^2/2.a = a^3/3.

12. Se n é um cubo perfeito, qual o menor cubo perfeito maior que n?

A) $n + 1 + 3\sqrt[3]{n}\ (\sqrt[3]{n}+1)$
B) $n - 1 + 3\sqrt[3]{n}\ (\sqrt[3]{n}+1)$
C) $n + 1 - 3\sqrt[3]{n}\ (\sqrt[3]{n}+1)$
D) $n - 1 - 3\sqrt[3]{n}\ (\sqrt[3]{n}+1)$
E) $n + 1 + 3\sqrt[3]{n}\ (\sqrt[3]{n}-1)$

Resposta: A

Justificativa:

O menor cubo maior que n é $(\sqrt[3]{n}\ + 1)^3$ = n + 1 + $3\sqrt[3]{n}\ (\sqrt[3]{n} + 1)$.

13. Qual a soma dos naturais, entre 100 e 1.000, que tem o dígito das unidades igual a 7?

A) 49.680
B) 49.690
C) 49.700
D) 49.710
E) 49.720

Resposta: A

Justificativa:

Os naturais que têm dígito das unidades 7 e estão entre 100 e 1000 são 107, 117, 127, ..., 997 e formam uma progressão aritmética com (997 – 107)/10 + 1 = 90 termos e a soma destes termos é (107 + 997)90/2 = 49680.

14. Na França, o consumo anual per capita de álcool proveniente do vinho, passou de 20 litros, em 1968 para 8 litros, em 2008. Se admitirmos um decrescimento percentual anual, constante e cumulativo, deste consumo, nestes 40 anos, qual será este decrescimento? Dado: use a aproximação $\sqrt[40]{0{,}4} \approx 0{,}98$.

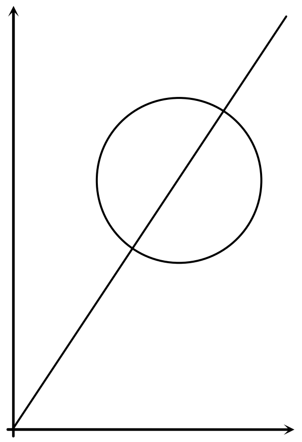
A) 1%
B) 5%
C) 3%
D) 4%
E) 2%

Resposta: E

Justificativa:

Se i é o decrescimento anual temos 8 = 20(1 - i)^{40} e daí 1 – i = $\sqrt[40]{0,4} \approx 0,98$. Portanto i = 0,02 = 2%.

15. Qual a maior distância entre um ponto da circunferência com equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ e a origem do sistema de coordenadas? Abaixo, estão esboçadas a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ e a reta y = 3x/2, que passa pela origem e pelo centro da circunferência.



A) $(\sqrt{13} + 1)/2$

B) $\sqrt{13} + 1$

C) $\sqrt{\sqrt{13} + 1}$

D) $\sqrt{\sqrt{13} - 1}$

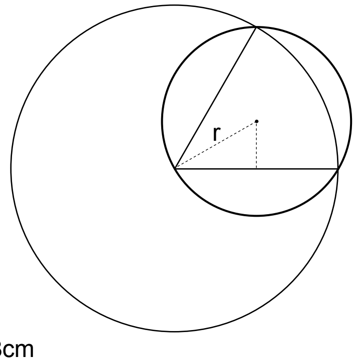
E) 2,15

Resposta: B

Justificativa:

A maior distância da origem a um ponto da circunferência é dada pela soma da distância entre o centro da circunferência e a origem com a medida do raio da circunferência, portanto, vale $\sqrt{2^2 + 3^2}$ + 1 = $\sqrt{13}$ +1.

16. Qual o raio r da circunferência circunscrita a um setor circular com ângulo central de 60°, pertencente a uma circunferência com raio $\sqrt{3}$ cm?



A) 0,8cm

B) 0,9cm

C) 1,2cm

D) 1,1cm

E) 1,0cm

Resposta: E

Justificativa:

A circunferência circunscrita ao setor circular também circunscreve o triângulo eqüilátero com lado medindo $\sqrt{3}$ cm(e vértices nos extremos do setor circular e no seu vértice). Portanto, o raio da circunferência circunscrita é 2/3. $\sqrt{3}$. $\sqrt{3}$ /2 = 1cm.